Eerste herhalingstentamen Complexe Analyse
12 April 2005, 09.00–12.00 uur

1. Laat U een deelverzameling zijn van het complexe vlak $\mathbb{C}$.
   (a) Geef de definitie van "U is compact".
   (b) Is de verzameling $\{\, 1 + \frac{1}{n}\, i : \, n \in \mathbb{Z}, \, n \neq 0 \,\}$ compact?
   (c) Geef een niet-trivaal voorbeeld van een compacte U.

2. Definieer de functie $f(z)$ door $f(z) = \frac{z^2}{z+2}$.
   (a) Toon aan dat de functie analytisch is in een omgeving van $z = 0$.
   (b) Bereken expliciet de convergente machtreeks $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ die in een omgeving van $z = 0$ gelijk is aan $f(z)$.
   (c) Bereken de convergentiestraal van die convergente machtreeks.

3. Definieer de functie $f(z)$ door $f(z) = \frac{z-2}{z^3}$. Laat zien dat de functie $|f(z)|$ een maximum bezit op de verzameling

   $$\{\, z \in \mathbb{C} : \, 1 \leq |z| \leq 10 \,\}.$$

   Bereken dit maximum en beargumenteer het antwoord.

4. Bereken de integraal

   $$\int_0^{2\pi} \frac{\cos 2\theta}{2 - \cos \theta}\, d\theta.$$

5. Bereken de oneigenlijke integraal

   $$\int_{\mathbb{R}} \frac{x \sin \omega x}{x^4 + 1}\, dx, \quad \omega > 0,$$

   via residuenrekening. Beargumenteer de wijze waarop het antwoord verkregen wordt.

6. Bereken de integraal

   $$\int_C \frac{1}{(e^z - 1)^2}\, dz$$

   waarbij C de in positieve zin doorlopen cirkel met middelpunt 0 en straal 2.5 is.
   Aanwijzing: bedenk hoe een residu uit een Laurent-ontwikkeling wordt afgelezen.